

## Der Existenzsatz für die Tschebyscheff-Approximation mit Exponentialsummen mit polynomialen Exponenten

MAIKE BESTEHORN

*Gablonzer weg 1, D-6242 Kronberg 2, West Germany*

*Communicated by G. Meinardus*

Received January 3, 1978

In der Literatur ist das Problem der gewöhnlichen Exponential approximation in der  $T$ -Norm sehr ausführlich betrachtet worden [3, 4, 13, 15, 17, 21, 22]. Die Autoren gingen dabei von der Funktionenklasse

$$E_n^0 = \left\{ y \in C(I) \mid y(x) = \sum_{j=1}^k \alpha_j e^{t_j x}, \alpha_j, t_j \in \mathbb{R}, k \leq n \right\} \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}$$

und  $I = [a, b]$  aus. Da man leicht zeigen kann, daß nicht für jedes  $f \in C(I)$  in  $E_n^0$  eine beste  $T$ -Approximierende existiert, betrachteten die Autoren deshalb die Funktionenklasse

$$E_n = \left\{ y \in C(I) \mid y(x) = \sum_{j=1}^k P_j(x) e^{t_j x}, t_j, P_j \text{ Polynom}, \sum_{i=1}^k (\delta P_j + 1) \leq n \right\}$$

und konnten die aus der zitierten Literatur bekannten Existenz- und Charakterisierungsaussagen verifizieren.

Aus Medizin, Physik, Chemie und Biologie sind jedoch Aufgaben bekannt, die eine Verallgemeinerung dieser Theorie erforderlich machen: z.B. denke man an Approximationsaufgaben, bei denen Summen von Gauß-Verteilungen an experimentell gewonnene Meßdaten angepaßt werden sollen.

Wir gehen daher von der Funktionenklasse

$$E_{n,m}^0 = \left\{ y \in C(I): y(x) = \sum_{i=1}^k \alpha_i e^{Q_i(x)}, Q_i \text{ Polynom}, \delta Q_i \leq m, \alpha_i \in \mathbb{R}, k \leq n \right\}$$

aus, die sogar im Sinne der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz dicht in

$$E_{n,m} = \left\{ y \in C(I): y(x) = \sum_{i=1}^k P_i(x) e^{Q_i(x)}, \right. \\ \left. P_i, Q_i \text{ Polynome}, \delta Q_i = m, \sum_{i=1}^k (\delta P_i + m) \leq n \cdot m \right\}$$

liegt. (Janßen [10]).

Hier soll gezeigt werden, daß aus jeder beschränkten Folge aus  $E_{n,m}$  eine Teilfolge gewonnen werden kann, die von endlich vielen Punkten  $I$  abgesehen konvergiert und in jedem abgeschlossenen Intervall, das keinen Ausnahmepunkt enthält, die Konvergenz sogar gleichmäßig ist.

Zu diesem Zweck wird zunächst für jedes  $y \in E_{n,m}$  ein annullierender Differentialoperator entwickelt, der selbst ein Produkt von Faktoren der Form  $(D - Q)$  mit  $Q$  Polynom und  $D := d/dx$  ist. Die Lösungsmenge der homogenen Differentialgleichungen enthält also die Menge  $E_{n,m}$ . Betrachtet man nun die Differentialoperatoren, die im wesentlichen aus der Permutation der Einzelfaktoren hervorgehen, so erhält man als Durchschnitt der Lösungsmengen der zugehörigen homogenen Differentialgleichungen die Menge  $E_{n,m}$ . (Der Lösungsmengendurchschnitt muß betrachtet werden, weil das Produkt der Einzelfaktoren nicht kommutativ ist).

Außerdem können für die Anzahl der Nullstellen jeder Funktion aus  $E_{n,m}$  sowie ihrer Ableitungen bis zu einer Ordnung  $r < \infty$  nur von  $n$ ,  $m$  und  $r$  abhängige Schranken angegeben werden, was schließlich zu der Aussage führt, daß für jede, auf einem reellen Intervall  $I$  in der Tschebyscheff-Norm beschränkten Teilmenge von  $E_{n,m}$  eine Teilfolge und eine endliche Punktmenge  $Z \subset I$  ausgewählt werden kann, so daß die Teilfolge auf  $I - Z$  punktweise gegen ein  $y \in E_{n,m}$  konvergiert. Diese Aussage führt nach bekannten Schlüssen zum Existenznachweis der besten Approximation für jedes  $f \in C(I)$ . Die zuletzt genannten Ergebnisse sind in meiner Dissertation [1] enthalten.

Herrn Prof. Dr. H. Werner sei an dieser Stelle ganz herzlich für seine Unterstützung und Diskussionsbereitschaft während der Anfertigung dieser Arbeit gedankt.

Bezeichnungen:

$I$  abgeschlossenes reelles Intervall

$\mathfrak{P}_m$  Raum der Polynome  $m$ -ten Grades

$e^Q: C(I) \rightarrow C(I)$  für  $Q \in C(I)$  mit  $(e^Q f)(x) = f(x) e^{Q(x)}$

$D: C^1(I) \rightarrow C(I)$  mit  $(Df)(x) = f'(x)$ .

## 1. ENTWICKLUNG EINES ANNULLIERENDEN DIFFERENTIALOPERATORS

In den Lemmata 1 und 2 werden zunächst die annullierenden Differentialoperatoren für Funktionen aus  $E_{1,m}$  bestimmt

LEMMA 1. Für  $f, y \in C^r(I)$ ,  $r \in \mathbb{N}$ ,  $x \in I$  gilt:

$$(D - f')^r y = e^f D^r (e^{-f} y),$$

*Beweis.* Durch Induktion und Differenzieren zu führen. ■

LEMMA 2. Die Differentialgleichung  $(D - f')^r y = 0$  wird genau von den Funktionen  $Pe^f$  mit  $P \in \mathfrak{P}_{r-1}$  gelöst.

Beweis. Aus  $(D - f')^r y = 0$ ,  $e^f D^r(e^{-f}y) = 0$  folgert man die Behauptung. ■

Im Hinblick auf das Problem, für die Funktionen aus  $E_{n,m}$  einen annullierenden Differentialoperator zu finden, zeigt Lemma 3 die Wirkung des in Lemma 1 u. 2 entwickelten Differentialoperators auf beliebige Summanden der Funktionen von  $E_{n,m}$ .

LEMMA 3. Seien  $P, Q, R$  Polynome mit  $\delta P =: n$ ,  $\delta(R' - Q') =: m - 1$ , dann gilt:

$$(D - Q')^r Pe^R =: Ze^R \quad \text{mit} \quad \delta Z = n + (m - 1)r.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} (D - Q')^r Pe^R &= e^Q D^r(e^{R-Q}P) \\ &= e^Q \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} \underbrace{(e^{R-Q})^{(i)} P^{(r-i)}}_{=: Z_i e^{R-Q} \text{ mit } \delta Z_i = i(m-1)} \\ &=: Ze^R \quad \text{mit} \quad \delta Z = r(m-1) + n. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Nachdem wir bisher nur Differentialgleichungen mit einem Faktor  $(D - Q')^r$  betrachtet haben, wenden wir uns jetzt Differentialoperatoren zu, die aus mehreren Faktoren der obigen Form zusammengesetzt sind.

Wir definieren dazu

$$\begin{aligned} \bar{Q} &:= (Q_1, Q_2, \dots, Q_k), & Q_i &\in \mathfrak{P}_m \\ \bar{s} &:= (s_1, s_2, \dots, s_k), & s_i &\in \mathbb{N}, \\ r &:= \sum_{i=1}^k s_i \end{aligned}$$

und für  $l \leq k$  den Operator

$$L(\bar{Q}, \bar{s}, l): C^r(I) \rightarrow C(I)$$

mit

$$\begin{aligned} L(\bar{Q}, \bar{s}, l) &= \prod_{i=1}^l (D - Q_i')^{s_i} y \\ &= (D - Q_1')^{s_1} \cdots (D - Q_l')^{s_l} y \end{aligned}$$

d.h. der Ausdruck soll stets von "rechts nach links" abgearbeitet werden.

Analog zur Fragestellung des Lemmas 3, beantwortet das folgende Lemma die Frage, zu welchem Ergebnis die Anwendung eines Differentialoperators der Form (1.1) auf beliebige Summanden von Funktionen aus  $E_{n,m}$  führt.

LEMMA 4. Seien  $R, Q_i \in \mathfrak{P}_m, Q'_i \neq R'$  für  $i = 1, \dots, l; P \in \mathfrak{P}_{n-1}$  und  $s_1 := n, s_i := n + \sum_{j=1}^{i-1} s_j(m-1)$  für  $i = 2, \dots, l+1$  dann gilt:

$$L(\bar{Q}, \bar{s}, l)P \cdot e^R = Z \cdot e^R \quad \text{mit} \quad Z \in \mathfrak{P}_{s_{l+1}-1}.$$

Beweis. Man wende Lemma 3  $l$ -mal an. ■

Wir können nun einen Differentialoperator der Form (1.1), der eine Funktion der Form  $y(x) = \sum_{i=1}^k P_i(x) e^{Q_i(x)}$  ( $P_i \in \mathfrak{P}_{n-1}, Q_i \in \mathfrak{P}_m, Q'_i \neq Q'_j$  für  $i \neq j$ ) annulliert, mit Hilfe der Lemmata 2 und 4 rekursiv aufbauen.

Sei nämlich

$$s_1 := n_1, \quad s_i := n_i + \sum_{j=1}^{i-1} s_j(m-1) \quad \text{für} \quad i = 2, \dots, k$$

dann gilt für  $l \leq k$  nach Lemma 4:

$$L(\bar{Q}, \bar{s}, l-1) P_l e^{Q_l} = Z_l e^{Q_l} \quad \text{mit} \quad \delta Z_l \leq n_l - 1 + \sum_{j=1}^{l-1} s_j(m-1) = s_l - 1.$$

Da  $s_l > \delta Z_l$  folgt wegen Lemma 2:

$$L(\bar{Q}, \bar{s}, l) P_l e^{Q_l} = (D - Q'_l)^{s_l} Z_l e^{Q_l} = 0,$$

so daß erst recht

$$L(\bar{Q}, \bar{s}, k) P_l e^{Q_l} = 0 \text{ ist, für } l = 1, \dots, k.$$

Damit ist der folgende Satz bewiesen:

SATZ 1. Sei  $k, n \in \mathbb{N}_0, Q_i \in \mathfrak{P}_m$  für  $i = 1, \dots, k, Q_i \neq Q_j$  für  $i \neq j$

$$s_1 := n_1, \quad s_i := n_i + \sum_{j=1}^{i-1} s_j(m-1) \quad \text{für} \quad i = 2, \dots, k; \quad (1.2)$$

dann hat die Differentialgleichung

$$L(\bar{Q}, \bar{s}, k) y = 0 \quad (1.3)$$

Lösungen der Form

$$y = \sum_{i=1}^k P_i e^{Q_i} \quad \text{mit} \quad \delta P_i \leq n_i - 1. \quad (1.4)$$

Für  $m = 1$  ist  $Q_i(x) = t_i x$ , wobei  $t_i \neq t_j$  für  $i \neq j$  sein muß, weil  $Q'_i \neq Q'_j$  für  $i \neq j$  vorausgesetzt worden ist. Somit lautet der Satz 1 für  $m = 1$ :

Die Differentialgleichung  $L(\bar{Q}, \bar{s}, k) y = \prod_{i=1}^k (D - t_i)^{n_i} y(x) = 0$  besitzt Lösungen der Form  $y(x) = \sum_{i=1}^k P_i(x) e^{t_i x}$  mit  $\delta P_i \leq n_i - 1$ ,  $t_i \in \mathbb{R}$ .

Bei den Exponentialsummen mit linearen Exponenten, d.h.  $m = 1$ , gilt sogar die Umkehrung von Satz 1 (Werner [23]). Versucht man dieses Ergebnis auch auf die Differentialgleichung (1.3) zu übertragen, so stellt man fest, daß  $L(\bar{Q}, \bar{s}, k) y = \prod_{i=1}^k (D - Q'_i)^{s_i} y = 0$  Lösungen besitzt, die sich nicht mit der Formel (1.4) beschreiben lassen. Andererseits macht man sich leicht klar, daß Funktionen der Form (1.4) durch  $k!$  in der Regel verschiedene Differentialgleichungen der Form (1.3), die man durch Permutation der  $Q_i$  aufbauen kann, annulliert werden. Das legt die Vermutung nahe, daß die Funktionen der Form (1.4) den Durchschnitt der Lösungsmengen gewisser Differentialgleichungen der Form (1.3) darstellen.

Dazu wird zunächst im Lemma 5 ein Fundamentalsystem zu den Differentialoperatoren  $\prod_{i=1}^n (D - Q'_i) y$  angegeben.

LEMMA 5. Seien  $m, n \in \mathbb{N}$  und  $Q_i \in \mathfrak{P}_m$  für  $i = 1, \dots, n$ . Dann besitzt der Differentialoperator  $L = \prod_{i=1}^n (D - Q'_i)$  das folgende Fundamentalsystem

$$h_1(x) = e^{Q_1(x)}, \quad h_2(x) = e^{Q_1(x)} \int_{x_0}^x e^{Q_2(t) - Q_1(t)} dt, \dots,$$

$$h_n(x) = e^{Q_1(x)} \int_{x_0}^x e^{f_1(t_1)} \int_{x_0}^{t_1} e^{f_2(t_2)} \dots \int_{x_0}^{t_{n-2}} e^{f_{n-1}(t_{n-1})} dt_{n-1} \dots dt_1$$

mit  $f_i(t) = Q_{i+1}(t) - Q_i(t)$  für  $i = 1, \dots, n - 1$ .

*Beweis.* Durch Differentiation und Nachweis der linearen Unabhängigkeit. ■

Sei  $(D - Q')^{-r}: C(I) \rightarrow C^r(I)$  durch

$$[(D - Q')^{-r} y](x) = e^{Q(x)} \int_0^x \dots \int_0^{t_{r-1}} e^{-Q(t_{r-1})} y(t_{r-1}) dt_{r-1}, \dots, dt_1$$

definiert und

$$L^{-1}(\bar{Q}, \bar{s}, k) := \prod_{i=0}^{k-1} (D - Q'_{k-i})^{-s_{k-i}} := (D - Q'_1)^{-s_1} \dots (D - Q'_k)^{-s_k},$$

dann besitzt  $L(\bar{Q}, \bar{s}, k) = \prod_{i=1}^k (D - Q'_i)^{s_i}$  das folgende Fundamentalsystem

wie man sich leicht mit Hilfe von Lemma 5 unter Benutzung der expliziten Schreibweise klarmacht:

$$\begin{aligned}
 h_\nu &= \prod_{i=0}^l (D - Q'_{i-i})^{-s_{l-i}} (D - Q'_{i+1})^{j(l)-1} e^{Q_i} \quad \text{für } l = 1, \dots, k, \\
 \nu &= \sum_{i=0}^{l-1} s_i + j(l), \quad s_0 = 0, \quad j(l) \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad 0 < j(l) \leq s_l
 \end{aligned}
 \tag{1.6}$$

Für den nächsten Satz benötigen wir das Ergebnis von

LEMMA 6. Seien  $m, n_1, n_2, s_1, s_2 \in \mathbb{N}$ , mit  $s_1 \leq n_1 + n_2(m - 1)$  und  $s_2 \leq n_2 + n_1(m - 1)$ ,  $\alpha_i \in \mathbb{R}$  für  $i = 0, \dots, s_1$  und  $\beta_i \in \mathbb{R}$  für  $i = 0, \dots, s_2$ ,  $Q_i \in \mathfrak{P}_m$  für  $i = 1, 2$  und  $Q'_1 \neq Q'_2$ . Dann gilt:

$$y = \sum_{i=0}^{s_2-1} \alpha_i (D - Q'_1)^{-n_1} (D - Q'_2)^{-i} e^{Q_2} \tag{1}$$

$$= \sum_{i=0}^{s_1-1} \beta_i (D - Q'_2)^{-n_2} (D - Q'_1)^{-i} e^{Q_1} \tag{2}$$

genau dann, wenn  $y = 0$  ist.

Beweis. Sei  $y \neq 0$ , dann können wir o.B.d.A. annehmen, daß  $\beta_{s_1-1} \neq 0$  ist. Damit gilt

$$(D - Q'_2)^{s_2} (D - Q'_1)^{n_1} y = 0, \quad \text{wenn man für } y \text{ die Formel (1) einsetzt.}$$

Weiter gilt mit  $R_j := e^{Q_1 - Q_2} D^j (e^{Q_2 - Q_1}) \in \mathfrak{P}_{j(m-1)}$  unter Benutzung des Binomialtheorems:

$$\begin{aligned}
 (D - Q'_2)^{s_2} (D - Q'_1)^{n_1} y &= e^{Q_2} D^{s_2} (e^{Q_1 - Q_2} D^{n_1} (e^{Q_2 - Q_1} [e^{-Q_2} y])) \\
 &= \sum_{l=0}^{n_1(m-1)} \binom{s_2}{l} \sum_{j=0}^{n_1} \binom{n_1}{j} D^l R_j [(D - Q'_2)^{s_2 + n_1 - j - l} y].
 \end{aligned}$$

Setzt man nun für  $y$  die Formel 2 ein, so erhält man

$$\begin{aligned}
 0 &= \sum_{i=0}^{s_1-1} \sum_{l=0}^{n_1(m-1)} \binom{s_2}{l} \sum_{j=0}^{n_1} \binom{n_1}{j} \cdot \underbrace{\beta_i D^l R_j \cdot (D - Q'_2)^{n_1 m - j - l} (D - Q'_1)^{-i} e^{Q_1}}_{=: B_{il} e^{Q_1}, \quad \delta B_{il} = n_1 m(m - 1) - lm + i} \\
 &=: Z e^{Q_1}.
 \end{aligned}$$

Der führende Koeffizient von  $Z$  ist gleichzeitig der führende Koeffizient von  $B_{s_1-1,0}$ . Da  $Z$  verschwindet, muß also insbesondere der führende Koeffizient von

$$\begin{aligned} B_{s_1-1,0} &= \beta_{s_1-1} \cdot \sum_{j=0}^{n_1} \binom{n_1}{j} R_j (D - Q_2)^{n_1 m - j} (D - Q_1)^{-s_1+1} e^{Q_1} \\ &= \beta_{s_1-1} \cdot \underbrace{e^{Q_1 - Q_2} D^{n_1} (e^{Q_2 - Q_1}) \cdot (D - Q_2)^{n_1(m-1)} (D - Q_1)^{-s_1+1} e^{Q_1}}_{\neq 0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

sein, d.h.  $\beta_{s_1-1} = 0$ . Widerspruch! ■

Wir kommen nun zu dem angekündigten Satz, der den Zusammenhang zwischen den Differentialoperatoren der Form (1.3) und der Funktionenfamilie  $E_{n,m}$  angibt.

**SATZ 2.** *Es seien  $n, m, k, n_1, \dots, n_n \in \mathbb{N}$  mit  $k \leq n$  und  $\sum_{i=1}^k (n_i - 1 + m) \leq nm$ ,  $Q_i \in \mathfrak{P}_m$  mit  $Q_i \neq Q_j$  für  $j \neq i$ . Außerdem sei  $\mathfrak{S}_k := \{\pi = (\pi(1), \dots, \pi(k)) : \pi \text{ Permutation der Zahlen von 1 bis } k\}$  und  $\mathfrak{M}_\pi \in C(I)$  sei die Lösungsmenge der Differentialgleichung:*

$$L_\pi(\bar{Q}, \bar{s}_\pi, k) := \prod_{i=1}^k (D - Q'_{\pi(i)})^{s_{\pi(i)}} y(x) = 0,$$

wobei

$$s_{\pi(1)} := n_{\pi(1)}, \quad s_{\pi(i)} := n_{\pi(i)} + \sum_{j=1}^{i-1} s_{\pi(j)}(m-1) \quad \text{für } i = 2, \dots, k$$

sind.

Dann gilt:

$$\bigcap_{\pi \in \mathfrak{S}_k} \mathfrak{M}_\pi = E_{n,m}.$$

*Beweis.* Wir müssen nur noch  $\bigcap_{\pi \in \mathfrak{S}_k} \mathfrak{M}_\pi \subset E_{n,m}$  beweisen, da  $E_{n,m}$  aufgrund von Satz 1 in  $\bigcap_{\pi \in \mathfrak{S}_k} \mathfrak{M}_\pi$  enthalten ist.

Induktion über  $k$ :

$k = 1$ : Nach Lemma 2 gilt für  $(D - Q'_i(x))^{n_1} y(x) = 0$ , daß  $y(x) = P_1(x) e^{Q_1(x)}$  ist, mit  $P_1 \in \mathfrak{P}_{n_1-1}$ .

$k = 2$ : Mit  $k = n_2 + n_1(m-1)$  und  $l = n_1 + n_2(m-1)$  gilt:

$$(D - Q'_2)^k (D - Q'_1)^{n_1} y = (D - Q'_1)^l (D - Q'_2)^{n_2} y = 0.$$

Dann gilt wegen Lemma 5 und (1.6)

$$\begin{aligned} y &= P_1 e^{Q_1} + (D - Q'_1)^{-n_1} Z_2 e^{Q_2} \\ &= P_2 e^{Q_2} + (D - Q'_2)^{-n_2} Z_1 e^{Q_1} \end{aligned}$$

mit geeignet gewählten  $P_1 \in \mathfrak{P}_{n_1-1}$ ,  $P_2 \in \mathfrak{P}_{n_2-1}$ ,  $Z_1 \in \mathfrak{P}_{i-1}$  und  $Z_2 \in \mathfrak{P}_{k-1}$ .  
Für

$$D^{n_2}(P_1 e^{Q_1 - Q_2}) =: \tilde{P}_1 e^{Q_1 - Q_2}$$

und

$$D^{n_1}(P_2 e^{Q_2 - Q_1}) =: \tilde{P}_2 e^{Q_2 - Q_1}$$

gilt dann

$$z = (D - Q'_1)^{-n_1} (Z_2 - \tilde{P}_2) e^{Q_2} = (D - Q'_2)^{-n_2} (Z_1 - \tilde{P}_1).$$

Aus Lemma 6 folgt nun sofort, daß  $(Z_1 - \tilde{P}_1) = 0$  gilt, so daß  $y = P_1 e^{Q_1} + P_2 e^{Q_2}$  ist, d.h.  $y$  hat die geforderte Gestalt. Für  $k < r$  setzen wir nun voraus, daß  $y = \sum_{i=1}^k P_i e^{Q_i}$  mit  $\delta P_i \leq n_i - 1$  gilt, falls  $\prod_{i=1}^k (D - Q'_{\pi(i)})^{s_{\pi(i)}} y = 0$  ist, für  $\pi \in \mathfrak{S}_k$ .

Sei  $\sigma$  eine  $(r - 1)$ -elementige Permutation, dann ist  $\pi := (r, \sigma(1), \dots, \sigma(r - 1))$  eine  $r$ -elementige Permutation. Es gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= \prod_{i=1}^r (D - Q'_{\pi(i)})^{s_{\pi(i)}} y \\ &= \prod_{i=1}^{r-1} (D - Q'_{\sigma(i)})^{s_{\pi(i+1)}} (D - Q'_r)^{n_r} y \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} s_{\pi(i+1)} &= n_{\pi(i+1)} + \sum_{j=1}^i s_{\pi(j)} \cdot (m - 1) \\ &=: (n_{\sigma(i)} + n_r(m - 1)) + \sum_{j=1}^{i-1} \tilde{s}_{\sigma(j)}(m - 1). \end{aligned}$$

Da  $s_{\pi(i+1)} = \tilde{s}_{\sigma(i)}$ , so daß insbesondere gilt:

$$\prod_{i=1}^{r-1} (D - Q'_{\sigma(i)})^{\tilde{s}_{\sigma(i)}} [(D - Q'_r)^{n_r} y] = 0,$$

woraus nach Induktionsvoraussetzung folgt:

$$(D - Q'_r)^{n_r} y =: \sum_{i=1}^{r-1} Z_i e^{Q_i} \quad \text{mit} \quad \delta Z_i = n_i - 1 + n_r(m - 1).$$



Damit ist

$$y = P_r e^{Q_r} + \sum_{i=1}^{r-1} \underbrace{(D - Q_r')^{-n_r} Z_i e^{Q_i}}_{=: h_i}$$

mit geeignet gewähltem  $P_r \in \mathfrak{P}_{n_r-1}$ .

Man rechnet nun einerseits leicht nach, daß

$$(D - Q_i')^{n_i+n_r(m-1)}(D - Q_r')^{n_r} h_i = 0 \quad \text{ist für } i = 1, \dots, r-1;$$

und zeigt andererseits wie in dem Beweis zu Lemma 6, daß

$$(D - Q_r')^{n_r+n_i(m-1)}(D - Q_i')^{n_i} h_i =: C_i e^{Q_i} \text{ gilt.}$$

Mit geeignet gewählten  $s_j, j = 1, \dots, r-1$ , gilt dann

$$\begin{aligned} 0 &= \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r-1} (D - Q_j')^{s_j} [(D - Q_r')^{n_r+n_i(m-1)}(D - Q_i')^{n_i} y] \\ &= \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r-1} (D - Q_j')^{s_j} \sum_{i=1}^{r-1} C_i e^{Q_i}, \end{aligned}$$

woraus  $C_i = 0$  wegen Lemma 4 folgt.

Also gilt nach Lemma 6:  $h_i = P_r^i e^{Q_r} + P_i e^{Q_i}$  mit  $P_r^i \in \mathfrak{P}_{n_r-1}$  und  $P_i \in \mathfrak{P}_{n_r-1}$  für  $i = 1, \dots, r$ , was zur Folge hat, daß

$$y = \left( P_r + \sum_{i=1}^{r-1} P_r^i \right) e^{Q_r} + \sum_{i=1}^{r-1} P_i e^{Q_i} \in E_{n,m} \text{ ist. } \blacksquare$$

Um die Existenz einer besten  $T$ -Approximierenden aus  $E_{n,m}$  für jedes  $f \in C(I)$  zu zeigen, müssen wir uns nun der Frage zuwenden, wie sich zusammenfallende Exponentenpolynomfolgen auf eine Grenzfunktion auswirken.

**LEMMA 7.** Für  $i = 1, \dots, k$  sei  $\{P_{il}\}_{l \in \mathbb{N}} \subset \mathfrak{P}_n, \{Q_{il}\} \subset \mathfrak{P}_m$  mit  $\lim_{l \rightarrow \infty} Q_{il} = Q$  und für  $y_l = \sum_{i=1}^k P_{il} e^{Q_{il}}$  gelte  $\|y_l\|_I < K < \infty$ , wobei  $I$  ein zusammenhängendes reelles Intervall sei.

Dann gibt es eine Teilfolge  $\{y_s\}_{s \in \mathbb{N}} \subset \{y_l\}_{l \in \mathbb{N}}$  und ein Polynom  $D^* \in \mathfrak{P}_{n+(k-1)m}$ , so daß  $\lim_{s \rightarrow \infty} y_s = D^* e^Q$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt.

*Beweis.* Für  $k = 1$  ist nichts zu zeigen. Die Behauptung sei richtig für  $k < r$ , dann gilt:

$$\sum_{i=1}^r P_{ii}e^{Q_i} = e^{Q_{11}} \underbrace{\left( P_{11} + e^{Q_{21}-Q_{11}} \left( \sum_{i=2}^r P_{ii}e^{Q_{ii}-Q_{2i}} \right) \right)}_{=: e^{Q_{1z_l}}}$$

so daß mit  $\|\sum_{i=1}^k P_{ii}e^{Q_{ii}}\|_l < K$ , auch ein  $\bar{K} \in \mathbb{R}^+$  existiert, für das  $\|P_{11} + e^{Q_{1z_l}}\|_l < \bar{K}$  ist.

Da  $\lim_{l \rightarrow \infty} e^{Q_l} = 1$  ist, folgt nun: Für eine Teilfolge, die wieder mit  $\{y_l\}_{l \in \mathbb{N}}$  bezeichnet werde, existiert ein  $K_1 \in \mathbb{R}^+$  mit  $\|P_{1l} + z_l\|_l < K_1$  für alle  $l \in \mathbb{N}$ . Wegen  $P_{1l} + z_l e^{Q_l} = (P_{1l} + z_l) + z_l(e^{Q_l} - 1) = (P_{1l} + z_l) + z_l Q_l e^{\delta_l Q_l}$  mit  $\delta_l(x) \in [0, 1]$  und  $\|P_{1l} + \bar{z}_l\|_l < K_1$ , folgt  $\|z_l Q_l\|_l < K_2$  für ein  $K_2 \in \mathbb{R}^+$  und für alle  $l \in \mathbb{N}$ , d.h.  $\|z_l Q_l\|_l = \|\sum_{i=2}^r P_{ii} Q_i e^{Q_{ii}-Q_{2i}}\|_l \leq K_2$ , woraus nach Induktionsvoraussetzung folgt: Es gibt eine Teilfolge  $\{y_s\}_{s \in \mathbb{N}} \subset \{y_l\}_{l \in \mathbb{N}}$  und Polynome  $\tilde{D}$  und  $\bar{D}$ , die in  $\mathfrak{B}_{n-1+(r-1)m}$  enthalten sind, mit

$$\lim_{s \rightarrow \infty} z_s Q_s = \lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{i=2}^r P_{is} Q_s e^{Q_{is}-Q_{2s}} = \tilde{D} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

und

$$\lim_{s \rightarrow \infty} P_{1s} + z_s = \lim_{s \rightarrow \infty} (P_{1s} + P_{2s}) + \sum_{i=3}^r P_{is} e^{Q_{is}-Q_{2s}} = \bar{D} \quad \text{für } x \in \mathbb{R},$$

so daß

$$\lim_{s \rightarrow \infty} y_s = (\tilde{D} + \bar{D}) e^Q =: D^* e^Q \text{ in } \mathbb{R} \text{ gilt. } \blacksquare$$

## 2. NULLSTELLENZÄHLUNG

Mit Hilfe des Satzes 2 können wir für jedes  $y \in E_{n,m}$  einen Differentialoperator  $L$  angeben, so daß  $L(y)$  verschwindet. Dies und der Satz von Rolle liefern uns eine obere Schranke für die Nullstellenzahl von  $y$ .

**SATZ 3.** Sei  $y = \sum_{i=1}^k P_i e^{Q_i} \in E_{n,m}$  mit  $\delta P_i = n_i - 1$  für  $i = 1, \dots, k$ ;  $Q_i \neq Q_j$  für  $i \neq j$ ,  $s_1 := n_1$  und  $s_i = n_i + \sum_{j=1}^{i-1} s_j(m-1)$  für  $i = 2, \dots, k$ . Dann hat  $y \neq 0$  höchstens  $\sum_{i=1}^k s_i - 1$  Nullstellen.

*Beweis.* (a)  $\sum_{i=1}^{k-1} (D - Q_i')^{s_i} y = Z_k e^{Q_k}$

$$\delta Z = n_k - 1 + \sum_{i=1}^{k-1} (m-1) s_i = s_k - 1, \quad \text{d.h. } \prod_{i=1}^{k-1} (D - Q_i')^{s_i} y$$

besitzt höchstens  $s_k - 1$  Nullstellen.

(b) Sei  $N$  die Anzahl der Nullstellen von  $y$ , dann besitzt  $\prod_{i=1}^{k-1} (D - Q_i)^{s_i} y$  mindestens  $N - \sum_{i=1}^{k-1} s_i$  Nullstellen, wie man durch  $(\sum_{i=1}^{k-1} s_i)$ -fache Anwendung des Satzes von Rolle unter Benutzung von Lemma 1 beweist.

(c) Sei  $N_1$  die Anzahl der Nullstellen von  $\prod^{k-1} (D - Q_i)^{s_i} y$ , dann folgt aus (a) und (b)

$$N - \sum_{i=1}^{k-1} s_i \leq N_1 \leq s_k - 1, \quad \text{also} \quad N \leq \sum_{i=1}^k s_i - 1. \quad \blacksquare$$

Da  $D^r = \sum_{i=1}^k D^r(P_i e^{Q_i}) =: \sum_{i=1}^k Z_i e^{Q_i}$  mit  $\delta Z_i = r(m-1) + \delta P_i$  ist, folgt mit Hilfe von Satz 3 sofort, daß auch für jedes  $r \in \mathbb{N}$  ein  $K(n, m, r)$  existiert, so daß  $D^r y$  höchstens  $K(n, m, r)$  Nullstellen hat für jedes  $y \in E_{n,m}$ .

### 3. DER EXISTENZSATZ FÜR DAS T-APPROXIMATIONSPROBLEM

Um zu zeigen, daß für jedes  $f \in C(I)$  eine beste  $T$ -Approximierende existiert, benötigen wir noch einige Hilfsaussagen, denen eine Arbeit von H. Werner [in 8] zugrunde liegt.

LEMMA 8. Sei  $y \in C^{r+1}(I)$ ,  $d > 0$ ,  $R = \bar{I} - \dot{I}$  (Rand des Intervalls  $I$ ),

$$Z_i(y) := \begin{cases} \{x \in I: D^i(y(x)) = 0\} & \text{falls } D^i \neq 0 \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$$

und  $|Z_i(y)| < \infty$  für  $i = 1, \dots, r$ .

Dann gilt:

$$|D^i(y(x))| \leq d^{-i} \|y\|_I \quad \text{für } i = 1, \dots, r$$

und

$$x \in I_r(y, d) := \left\{ x \in I: |x - z| > rd \text{ für } z \in \bigcup_{i=1}^{r+1} Z_i(y) \cup R \right\}.$$

*Beweis.*  $r = 0$ : klar

$r > 0$ : Die Aussage sei richtig für  $r - 1$ .

Für  $z(x) := D^{r-1}(y(x))$  und  $K_{r-1} = d^{1-r} \|y\|_I$  gilt:  $|z(x)| \leq K_{r-1}$  in  $I_{r-1}(y, d)$ . Da für  $z(x) = 0$  oder  $D(z(x)) = 0$  nichts zu beweisen ist, nehmen wir an  $z(x)$ ,  $D(z(x)) \neq 0$  in  $I_r(y, d)$ . Nach Voraussetzung besteht  $Z_{r+1}(y)$  aus höchstens endlich vielen Punkten. Zerlegt man mit diesen Punkten  $I_{r-1}(y, d)$  in Teilintervalle  $J_i$ , so ist  $D(z(x))$  in jedem dieser Teilintervalle monoton ohne Vorzeichenwechsel und nimmt das betragsmäßige Maximum in einem Randpunkt  $u$  von  $J_i$  an, der entweder zu  $Z_{r+1}(y)$  oder zu  $I_{r-1}(y, d)$  gehört.

Damit ist  $K_{r-1} \geq |z(u) - z(x)| = \left| \int_x^u D(z(t)) dt \right| \geq |u - x| |D(z(x))|$ .  
 Gehört  $x$  zu  $I_r(y, d)$ , dann ist  $|x - u| > d$  und dann gilt:  $|D^r(y(x))| = |D(z(x))| \leq d^{-1}K_{r-1} = d^{-r} \|y\|_I$ . ■

Sei nun  $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine in der  $T$ -Norm beschränkte Folge aus  $C^{r+2}(I)$ , deren Folgenglieder den Voraussetzungen des Lemmas 6 genügen, d.h.  $\|y_n\|_I \leq K$ ,  $|Z_i(y)| < \infty$  für  $i = 0, \dots, r + 2$ . Da  $Z_i(y_n) \subset I$ , gibt es eine Teilfolge  $\{\tilde{y}_n\} \subset \{y_n\}$ , für die

$$Z_i(\tilde{y}_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Z_i \quad \text{strebt für } i = 0, \dots, r + 2$$

(d.h.  $\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$ , so daß  $Z_i(y_n) \subset Z_i + \epsilon := \{x + \epsilon : x \in Z_i\}$ ). Sei  $Z = \bigcup_{i=1}^{r+2} Z_i \cup R$ ,  $I(d) = \{x \in I : |x - z| > (r + 1)d \text{ für } z \in Z\}$  und o.B.d.A.  $\{\tilde{y}_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , dann gilt für fast alle  $n: |D^i(y_n(x))| \leq (2/d)^i \cdot K$  für  $i = 0, \dots, r + 1$  und  $x \in I(d)$ , so daß wieder eine Teilfolge  $\{\tilde{y}_n\} \subset \{y_n\}$  ausgewählt werden kann, mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} D^i(\tilde{y}_n(x)) =: D^i(\tilde{y}(x))$  für  $i = 0, \dots, r$ , wobei  $\tilde{y}(x)$  eine  $r$ -mal stetig differenzierbare Funktion in  $I(0)$  ist. Diesen Sachverhalt fassen wir in dem folgenden Lemma zusammen.

LEMMA 9. Sei  $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge aus  $C^{r+2}(I)$ ,  $\|y_n\| < K$  und  $|Z_i(y_n)| < \infty$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $i = 0, \dots, r + 2$ , dann gibt es eine Teilfolge  $\{\tilde{y}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  und eine endliche Punktmenge  $Z$ , so daß  $\lim_{n \rightarrow \infty} D^i(y_n(x)) = D^i(\tilde{y}(x))$  für  $i = 1, \dots, r$  und  $x \in I(0) = I - Z$  gilt, wobei  $\tilde{y}$  eine  $r$ -mal stetig differenzierbare Funktion in  $I(0)$  ist.

Wir haben jetzt alle Hilfsmittel bereitgestellt, um den für die Existenzaussage wesentlichen Satz beweisen zu können.

SATZ 4. Sei  $\{y_l\}_{l \in \mathbb{N}}$  eine Folge aus  $E_{n,m}$  und es gelte  $\|y_l\|_I \leq K$  für  $K \in \mathbb{R}^+$ , dann gibt es eine endliche Punktmenge  $Z$  und eine Teilfolge  $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \{y_l\}_{l \in \mathbb{N}}$ , die in  $I - Z$  punktweise gegen ein  $y^* \in E_{n,m}$  konvergiert, d.h. es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = y^*(x) \quad \text{für } x \in I - Z.$$

Beweis. Da wir im folgenden sehr häufig Teilfolgen aus der Menge  $\{y_l\}_{l \in \mathbb{N}}$  auswählen müssen, nehmen wir zur Vereinfachung der Schreibweise an, daß die ausgewählte Teilfolge jeweils mit  $\{y_l\}_{l \in \mathbb{N}}$  zusammenfällt. Wir stellen also fest, daß nach mehrfachem Übergang zu einer Teilfolge die folgenden Eigenschaften vorliegen:

- (i) Es gibt Zahlen  $k, n_i \in \mathbb{N}$ , so daß für alle  $l \in \mathbb{N}$  gilt:

$$y_l = \sum_{i=1}^k P_{il} e^{Q_{il}} \in E_{n,m} \quad \text{mit} \quad \delta P_{il} = n_i - 1$$

und o.B.d.A.  $Q_{il}(0) = 0$  ist.

(ii) Weiter gilt

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \|Q_{il}\|_l = \begin{cases} a_i < \infty & \text{für } i = 1, \dots, \tau, \\ \infty & \text{für } i = \tau + 1, \dots, k \end{cases} \quad (4.1)$$

und

$$\lim_{l \rightarrow \infty} Q_{il} = Q_i \in \mathfrak{B}_m \quad \text{für } i \leq \tau.$$

(Die Sonderfälle  $\tau = 0$  und  $\tau = k$  sind im Beweisgang enthalten, es entfällt dann der erste bzw. zweite Teil von (4.1).)

(iii) Außerdem seien die Indizes von  $Q_{il}$  ( $i = 1, \dots, \tau$ ) so gewählt, daß  $\lim_{l \rightarrow \infty} Q'_{il} = Q'_j$  für  $i = a(j), \dots, a(j+1) - 1$  und  $j = 1, \dots, \tau^*$ , wobei

$$a(1) := 1, \quad a(j) := \sum_{i=1}^{j-1} d_j + 1 \quad \text{für } j = 2, \dots, \tau^* \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^{\tau^*} d_j = \tau \text{ gilt.}$$

(Mit anderen Worten: Es gibt  $\tau^*$  verschiedene Limiten  $Q'_i$  für  $i = 1, \dots, \tau$ , wobei die Indizes  $i$  der  $Q_{il}$ , die zum gleichen Limes gehören, aufeinander folgen sollen.)

Man beachte, daß wegen  $Q_{il}(0) = 0$ , aus  $\lim_{l \rightarrow \infty} Q'_{il} = Q'_i$  auch  $\lim_{l \rightarrow \infty} Q_{il} = Q_i$  folgt

(iv) Sei  $s_1 := n_1 - 1$ ,  $s_i := n_i + \sum_{j=1}^{i-1} s_j(m-1)$  für  $i = 2, \dots, k$  und  $\bar{r} := \sum_{i=1}^k s_i$ , dann gibt es wegen Lemma 9 eine endliche Punktmenge  $Z$ , so daß  $\{y_l\}_{l \in \mathbb{N}}$  in  $I(0) := I - Z$  punktweise gegen ein  $y^* \in C^r(I(0))$ , konvergiert.

Der Beweis gliedert sich nun in folgende Schritte:

(a) Für jedes  $j = 1, \dots, \tau^*$  gilt: Es gibt ein  $K \in \mathbb{R}^+$ , so daß

$$\left| \sum_{i=a(j)}^{a(j+1)-1} P_{il} e^{Q_{il}} \right|_{I(0)} < K \quad \text{für fast alle } l \in \mathbb{N} \text{ gilt.} \quad (4.2)$$

In einem zusammenhängenden Teilintervall  $J \subset I(0)$  und evtl. nach Teilfolgenauswahl gilt dann wegen Lemma 7 und  $\lim_{l \rightarrow \infty} Q_{il} = Q^*$  für  $i = a(j), \dots, a(j+1) - 1$ :

(b) Für  $j = 1, \dots, \tau^*$  gibt es Polynome  $D_j^* \in \mathfrak{P}_{n_j}^*$  mit

$$n_j^* := \max_{i=a(j), \dots, a(j+1)} (n_i - 1) + (d - 1)m$$

und

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{i=a(j)}^{a(j+1)-1} P_{il}(x) e^{Q_{il}(x)} = \lim_{l \rightarrow \infty} D_j^*(x) e^{Q_j^*(x)} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}. \quad (4.3)$$

(c) Im nächsten Schritt beweist man

$$y^*(x) = \lim_{l \rightarrow \infty} y_l(x) = \sum_{j=1}^{\tau^*} D_j^*(x) e^{Q_j^*(x)} \quad \text{für } x \in I(0) \quad (4.4)$$

und wegen (b) folgt:

$$y^*(x) = \sum_{j=1}^{\tau^*} D_j^*(x) e^{Q_j^*(x)} \quad \text{für } x \in I(0)$$

und wegen  $\sum_{j=1}^{\tau^*} (n_j^* + m) < n \cdot m$  ist  $y^* \in E_{n,m}$ .

Da sich (b) aus (a) leicht folgern läßt, bleiben nur noch (4.2) und (4.4) zu zeigen, um den Beweis zu vervollständigen.

zu (4.2): Nach Satz 1 gilt:  $\prod_{i=1}^k (D - Q'_i)^{s_i} y_l = 0$ , wobei die  $s_i$  wie in (iv) berechnet werden.

Sei  $b_{il}$  für  $i > \tau$  so gewählt, daß die Quadratsumme der Koeffizienten von  $(1/b_{il}) Q'_i$  zu 1 normiert ist, dann definieren wir:

$$W_l := \prod_{i=\tau+1}^k (b_{il})^{-s_i} \cdot \prod_{i=\tau+1}^k (D - Q'_i)^{s_i}.$$

Wenn dann für  $Z_l \in C^r(I)$  mit  $r = \sum_{i=1}^k s_i$  gilt  $\lim_{l \rightarrow \infty} Z_l(x) = z^*(x)$  punktweise für  $x \in I(0)$ , so erhält man punktweise in  $I(0)$

$$\begin{aligned} \lim_{l \rightarrow \infty} W_l Z_l &= \lim_{l \rightarrow \infty} \prod_{i=\tau+1}^k \left( \frac{1}{b_{il}} D - \frac{1}{b_{il}} Q'_i \right)^{s_i} Z_l \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} \underbrace{\prod_{i=\tau+1}^k \left( -\frac{1}{b_{il}} Q'_i \right)^{s_i}}_{=: R^*} Z_l =: R^* z^*, \end{aligned} \tag{4.5}$$

weil einerseits  $1/b_{il}$  für  $i > \tau$  divergiert, während  $(1/b_{il}) Q'_i$  auf  $I$  gleichmäßig konvergiert. Insbesondere ist  $R^* \neq 0$ . Für  $j = 1, \dots, \tau^*$  sei

$$L_l := \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq a(j), \dots, a(j+1)-1}}^{\tau} (D - Q'_i)^{s_i},$$

dann gilt

$$\begin{aligned} \lim_{l \rightarrow \infty} L_l y_l &= \lim_{l \rightarrow \infty} L_l \left( \sum_{i=a(j)}^{a(j+1)-1} P_{il} e^{Q_{il}} \right) \\ &= \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq a(j), \dots, a(j+1)-1}}^{\tau} (D - Q_i^*)^{s_i} y^* =: L^* y^* \end{aligned}$$

punktweise in  $I(0)$ , so daß

$$\lim_{l \rightarrow \infty} W_l L_l \left( \sum_{i=a(j)}^{a(j+1)-1} P_{il} e^{Q_{il}} \right) = R^* L^* y^* < \infty \text{ in } I(0) \text{ folgt.} \tag{4.6}$$

(Die Summationsgrenzen  $i = a(j)$  bis  $i = a(j+1) - 1$  werden im folgenden weggelassen.)

Für  $N_l := \|\sum P_{il}e^{O_{il}}\|_{I(0)}$ , nehmen wir an, es gebe eine Teilfolge mit  $\lim_{l \rightarrow \infty} N_l = \infty$ , dann gibt es nach Lemma 7 ein Polynom  $D^*$  für das  $\lim_{l \rightarrow \infty} (1/N_l) \sum P_{il}e^{O_{il}} = D^*e^{O_j^*}$  ist, wobei wegen  $\|D^*e^{O_j^*}\|_{I(0)} = 1$  insbesondere  $D^*$  nicht verschwindet. Nach Lemma 4 gilt dann:

$$\lim_{l \rightarrow \infty} W_l L_l \left( \frac{1}{N_l} \sum P_{il}e^{O_{il}} \right) = R^* L^*(D^*e^{O_j^*}) \neq 0 \text{ in } I(0).$$

Aus  $\lim_{l \rightarrow \infty} N_l = \infty$  und (4.6) folgt andererseits

$$\lim_{l \rightarrow \infty} W_l L_l \left( \frac{1}{N_l} \sum P_{il}e^{O_{il}} \right) = 0 \text{ in } I(0).$$

Widerspruch! Daher gibt es ein  $K \in \mathbb{R}^+$  mit  $\|\sum_{i=a(j)}^{a(j+1)-1} P_{il}e^{O_{il}}\| < K$  für fast alle  $l \in \mathbb{N}$ .

zu (4.4): (Es werden jetzt (a) und (b) als bewiesen vorausgesetzt.) Wegen

$$y_l - \sum_{j=1}^{\tau^*} \sum_{i=a(j)}^{a(j+1)-1} P_{il}e^{O_{il}} = \sum_{i=\tau+1}^k P_{il}e^{O_{il}}$$

und  $\lim_{l \rightarrow \infty} y_l(x) = y^*(x)$  und

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\tau^*} \sum_{i=a(j)}^{a(j+1)-1} P_{il}e^{O_{il}} = \sum_{j=1}^{\tau^*} D_j^* e^{O_j^*}$$

punktweise in  $I(0)$ , muß auch  $\lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{i=\tau+1}^k P_{il}e^{O_{il}}$  punktweise in  $I(0)$  existieren.

Dann gilt wegen (4.5) mit  $L_l = Id$  punktweise in  $I(0)$ :

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{l \rightarrow \infty} W_l \left( \sum_{i=\tau+1}^k P_{il}e^{O_{il}} \right) \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} W_l \left( y_l - \sum_{j=1}^{\tau^*} \sum_{i=a(j)}^{a(j+1)-1} P_{il}e^{O_{il}} \right) \\ &= R^* \left( y^* - \sum_{j=1}^{\tau^*} D_j^* e^{O_j^*} \right). \end{aligned}$$

Wegen  $R \neq 0$ , muß  $y^* = \sum_{j=1}^{\tau^*} D_j^* e^{O_j^*}$  in  $I(0)$  gelten. ■

Der eben bewiesene Satz besagt, daß jede auf  $I$  beschränkte Teilmenge von  $E_{n,m}$ , eine Teilfolge besitzt, die punktweise gegen ein  $y$  aus  $E_{n,m}$  auf

einer Punktmenge  $J \subset I$  konvergiert, wobei  $J$  höchstens endlich viele Punkte von  $I$  nicht enthält. Somit kann man mit den üblichen Methoden die Existenz einer besten Approximierenden folgern.

**KOROLLAR 1.** *I sei ein abgeschlossenes reelles Intervall. Dann besitzt jede Funktion  $f \in C(I)$  eine beste Tschebyscheff-Approximierende aus  $E_{n,m}$ .*

#### LITERATURVERZEICHNIS

1. M. BESTEHORN, "Exponentialapproximation mit polynomialen Exponenten," Dissertation, Universität Münster, 1975.
2. M. BESTEHORN, "Implementierung eines Verfahrens zur Approximation empirischer Daten mit einer Summe von gewichteten Gaußverteilungen," Diplomarbeit, Schriftenreihe des Rechenzentrums Nr. 5, Münster 1974.
3. D. BRAESS, Approximation mit Exponentialsummen, *Computing* 2 (1967), 308–321.
4. D. BRAESS, Über die Vorzeichenstruktur der Exponentialsummen, *J. Approximation Theory* 3 (1970), 101–113.
5. B. BROSOWSKI, "Nichtlineare Tschebyscheff-Approximation," BI-Hochschulschriften, Mannheim, Bd. 808/808a, 1968.
6. E. W. CHENEY, "Introduction to Approximation Theory," McGraw-Hill, New York/St. Louis/San Francisco/Sydney, 1966.
7. E. A. CODDINGTON UND N. LEVINSON, "Theory of Ordinary Differential Equations," McGraw-Hill, New York/Toronto/London, 1955.
8. L. COLLATZ UND H. UNGER, "Funktionalanalytische Methoden der numerischen Mathematik," Birkhäuser, Basel/Stuttgart, 1969.
9. L. COLLATZ UND W. KRABS, "Approximationstheorie," Teubner Studienbücher, Stuttgart, 1973.
10. P. JANSSEN, "Zur Approximation mit mehrparametrischen  $g$ -Polynomen, insbesondere Exponentialapproximation," Dissertation, Universität Münster, 1970.
11. W. KRABS, Charakterisierung der Eindeutigkeit bei der nichtlinearen gleichmäßigen Approximation, *J. Approximation Theory* 2 (1969), 258–264.
12. G. MEINARDUS, "Approximation von Funktionen und ihre numerische Behandlung," Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg/New York, 1964.
13. G. MEINARDUS UND D. SCHWEDT, Nichtlineare Approximationen, *Arch. Rational Mech. Anal.* 17 (1964), 297–326.
14. G. POLYA UND G. SZEGÖ, "Aufgaben und Lehrsätze der Analysis," Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg, 1960.
15. J. R. RICE, Chebyshev approximation by exponentials, *SIAM J. Appl. Math.* 10 (1962), 149–161.
16. J. R. RICE, "The Approximation of Functions," Vols. I, II, Addison-Wesley, Reading, Mass./Palo Alto/London, 1964/1969.
17. E. SCHMIDT, "Normalität und Stetigkeit bei der Tschebyscheff-Approximation mit Exponentialsummen," Dissertation, Universität Münster, 1968.
18. A. SCHÖNHAGE, "Approximationstheorie," de Gruyter, Berlin/New York, 1971.
19. A. TALBOT, "Approximation Theory," Academic Press, New York/London, 1970.
20. H. WERNER, "Vorlesungen über Approximationstheorie," Lecture Notes in Mathematics No. 14, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1966.



21. H. WERNER, "Der Existenzsatz für das Tschebyscheffsche Approximationsproblem mit Exponentialsummen," Oberwolfach, 1967.
22. H. WERNER, "Tschebyscheff-Approximation with Sums of Exponentials," Lancaster, 1969.
23. H. WERNER UND R. SCHABACK, "Praktische Mathematik II," Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York 1972.